ΘΕΩΡΗΜΑ (Αναλυτική μορφή του Θεωρήματος Hahn και Banach)

Ας είναι X γραμμικός χώρος, $p: X \to \mathbb{R}$ ένα γραμμικό υποσυναρτησοειδές και $\varphi: Y \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση με Y γραμμ. υπόχωρος του X και $\varphi(y) \leq p(y)$, $\forall y \in Y$. Τότε υπάρχει $\psi: X \to \mathbb{R}$ γραμμική και επέκταση της φ (δηλ. $\psi/_Y = \varphi$) ώστε $\psi(x) \leq p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη:

Ειδική περίπτωση: (Επέκταση κατά μία διάσταση)

$\dim X = \dim Y + 1$

Δηλαδή, $X = Y \oplus \text{span}\{x_0\}$, $\forall x_0 \in X \setminus Y$

Σε αυτή την περίπτωση κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = y + \lambda x_0$, $y \in Y$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f_a: X \to \mathbb{R}$ όπου $f_a(y + \lambda x_0) = \varphi(y) + \lambda \alpha$. Θέλουμε η f_a να ικανοποιεί την ανισότητα $f_a \leq p$.

Η f_a λοιπόν $\forall a \in \mathbb{R}$ είναι μία γραμμική επέκταση της φ, αφού διατηρεί το άθροισμα & τα βαθμωτά γινόμενα. $\to$ $f_a[(y_1 + \lambda_1 x_0) + (y_2 + \lambda_2 x_0)] = f_a(y_1 + \lambda_1 x_0) + f_a(y_2 + \lambda_2 x_0)$

$$\Rightarrow \varphi(y_1 + y_2) + (\lambda_1 + \lambda_2) a \overset{\varphi \text{ γραμ}}{=\!=} \varphi(y_1) + \varphi(y_2) + \lambda_1 a + \lambda_2 a =$$

$$= \varphi(y_1) + \lambda_1 a + \varphi(y_2) + \lambda_2 a = f_a(y_1 + \lambda_1 x_0) + f_a(y_2 + \lambda_2 x_0)$$

Για το βαθμωτό γινόμενο ισχύει:

$$f_a(\mu(y + \lambda x_0)) = f_a(\mu y + \mu \lambda x_0) = \varphi(\mu y) + \mu \lambda a =$$

$$\overset{\varphi \text{ γραμ}}{=\!=} \mu \varphi(y) + \mu \lambda a = \mu f_a(y + \lambda x_0)$$

Αρκεί να προσδιορίσουμε κατάλληλη τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f_a(x) \le p(x), \forall x \in X \Leftrightarrow f_a(y+\lambda x_0) \le p(y+\lambda x_0)$

$\Leftrightarrow \varphi(y)+\lambda a \le p(y+\lambda x_0) \quad , \forall y \in Y, \lambda \in \mathbb{R} \quad (*)$

• Για $\lambda=0$ προφανώς και ισχύει η $(*)$.

• Για $\lambda>0$ τότε θσο

$$\varphi(y)+\lambda a \le p(y+\lambda x_0), \forall y \in Y \overset{\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{\varphi(y)}{\lambda}+\alpha \le \frac{p(y+\lambda x_0)}{\lambda} \underset{\text{συνάρτησ.}}{\overset{\text{P υποργρ.}}{\Longleftrightarrow}} \frac{\varphi(y)}{\lambda}+\alpha \le p\left(\frac{y}{\lambda}+x_0\right) \overset{\varphi \text{ γραμ.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)+\alpha \le p\left(\frac{y}{\lambda}+x_0\right) \Leftrightarrow \alpha \le p\left(\frac{y}{\lambda}+x_0\right)-\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right), \forall y \in Y$$

$$\Leftrightarrow \alpha \le p(x+x_0)-\varphi(x), \quad \forall x \in Y, \text{ με } x=\frac{y}{\lambda} \quad (1)$$

• Για $\lambda<0$ τότε θσο

$$\varphi(y)+\lambda a \le p(y+\lambda x_0), \forall y \in Y \overset{\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}>0\right)}{\Longleftrightarrow}$$

$$-\frac{\varphi(y)}{\lambda}-a \le -\frac{1}{\lambda}\cdot p(y+\lambda x_0) \Longleftrightarrow -\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)-a \le p\left(-\frac{y}{\lambda}-x_0\right) \Leftrightarrow$$

$$\alpha \ge -\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)-p\left(-\frac{y}{\lambda}-x_0\right) \quad \forall y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\alpha \ge -\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right)-p\left(-\frac{y}{\lambda}-x_0\right), \forall y \in Y \Leftrightarrow$$

$$\alpha \ge -\varphi(y)-p(-y-x_0), \quad \forall y \in Y \quad (2)$$

Αναζητώ $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν (1) και (2)

$$-\varphi(y)-p(-y-x_0) \le a \le p(x+x_0)-\varphi(x), \quad \forall x,y \in Y$$

Για κάθε $x,y \in Y$

Έχουμε ότι $\underline{\varphi(x)-\varphi(y)} \overset{\text{γρ.}}{=} \varphi(x-y) \le p(x-y) =$

$= p((x+x_0)+(-y-x_0)) \le \underline{p(x+x_0)+p(-y-x_0)} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\varphi(y)-p(-y-x_0) \le p(x+x_0)-\varphi(x), \quad \forall x,y \in Y$

Άρα, θέτοντας

$S=\sup\{-\varphi(y)-p(-y-x_0), \ y \in Y\}$ και $t=\inf\{p(x+x_0)-\varphi(x) : x \in Y\}$

Επεται απο την παραπάνω ανισωση: $S \leq t$.
Επιλέγουμε $\alpha \in \mathbb{R}$ με $S \leq \alpha \leq t$
Και άρα για αυτό το α εχουμε ότι ισχυουν τελικά οι σχεσεις ① και ②
Επομενως, $-\varphi(y) - p(-y - x_0) \leq \alpha \leq p(x+x_0) - \varphi(x)$, $\forall x, y \in Y$
και άρα για το αντιστοιχο $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ ισχυει το συμπερασμα στην ειδική περίπτωση

<u>Γενική περίπτωση:</u>
Εστω $\Gamma = \{ (Z, f) : Z$ γραμμικος υποχωρος του X, με $Y \subset Z$
και $f : Z \to \mathbb{R}$ γραμμική επεκταση της φ με
$f(z) \leq p(z)$, $\forall z \in Z \}$.
Θδο $\exists (Z, f) \in \Gamma$ με $Z = X$
$\Gamma \neq \emptyset$ γιατί περιέχει το ζευγος (X, φ)
Ορίζουμε την ακολουθη μερική διάταξη $\prec$ στο Γ:
$(Z_1, f_1) \prec (Z_2, f_2) \Leftrightarrow Z_1 \subset Z_2$ και $f_2 / _{Z_1} = f_1$
(προφανως μερική αφου αυτοπαθής, αντισυμμετρ., μεταβατ.)
Εστω $\Delta = \{ (Z_i, f_i) : i \in I \}$ ολικά διατεταγμενο υποσυνολο του $(\Gamma, \prec)$ (δηλ. μια αλυσίδα στο Γ)
Θέτουμε $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ και $f : Z \to \mathbb{R}$ με $f(z) = f_i(z)$
αν $z \in Z_i$ και Θδο $(Z, f) \in \Gamma \Leftrightarrow$
Z γραμμ. υποχωρος του X με $Y \subset Z$
Προφανως $Y \subset Z$ (διοτι $Y \subset Z_i$, $\forall i \in I$)
Εστω x, y εν $Z \Rightarrow x, y \in \bigcup_{i \in I} Z_i \Rightarrow \exists i_1, i_2 : x \in Z_{i_1}, y \in Z_{i_2}$
αλλα, Δ ολικά διατεταγμενο και άρα
$(Z_{i_1}, f_{i_1}) \preceq (Z_{i_2}, f_{i_2})$ ή $(Z_{i_2}, f_{i_2}) \preceq (Z_{i_1}, f_{i_1})$
Για την $1^η$ περιπτωση
x, y εν $Z_{i_2} \Rightarrow x + y \in Z_{i_2} \subset Z$
Για την $2^η$ περιπτωση:
x, y εν $Z_{i_1} \Rightarrow x + y \in Z_{i_1} \subset Z$
Και επίσης $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (στην $1^η$ περίπτωση)

$\lambda x \in Z_{i_2} \subset Z$ και στην $2^{η}$ περίπτωση $\lambda x \in Z_{i_1} \subset Z$
Αρα, σε καθε περιπτωση
$x+y \in Z$ και $\lambda x \in Z$
Η f καλά οριομένη διοτι αν $z \in Z_{i_1}$ και $z \in Z_{i_2}$
$\Rightarrow (Z_{i_1}, f_{i_1}) \leq (Z_{i_2}, f_{i_2})$ ή $(Z_{i_2}, f_{i_2}) \leq (Z_{i_1}, f_{i_1})$
και άρα η f_{i_2} είναι επεκτασου της f_{i_1}
ή f_{i_1} ειναι επεκτασου της f_{i_2}.
Ταυτεσωμ $f_{i_1}(z) = f_{i_2}(z)$.
Οδο f γραμμική
Εστωσαν x, y εν Z και $\lambda \in \mathbb{R}$
Τοτε όπως και πρίν, $\exists\, j \in I : x, y \in Z_j$
$f_j(x+y) = f_j(x) + f_j(y)$ | $\Rightarrow$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f_j(\lambda x) = \lambda \cdot f_j(x)$ | $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
f επεκτείνει την φ (διοτι: f επεκτείνει καθε f_i και η f_i επεκτείνει την φ)
$f(z) \leq p(z)$ $\forall z \in Z$ γιατί αν επιλεξουμε τυχον $z \in Z$ τοτε $\exists\, i \in J$: $z \in Z_i$ $f(z) = f_i(z) \leq p(z)$
Επισης, το (Z, f) ειναι ανω φραγμα του Δ
δηλ. $(Z_i, f_i) < (Z, f)$ $\forall i \in I$
διοτι, $Z_i \subset Z$ και f επεκτείνει την f_i
Συνεπως, απο το λήμμα του Zorn
$\exists (W, \psi)$ μεγιστικο στοιχείο του $(\Gamma, \preceq)$
Αρκει, νδο $W = X$
Εστω $W \neq X$
Δηλαδη, $\exists x_0 : x_0 \in X$ και $x_0 \notin W \Rightarrow x_0 \in X \setminus W$
Θετουμε $Z = W \oplus \mathrm{Span}(\{x_0\})$
Απο την ειδική περίπτωση $(\exists h)$ $h : Z \to \mathbb{R}$ γραμμικη
επεκτασυ της ψ ωστε $h(z) \leq p(z)$, $\forall z \in Z$
Τότε, $(Z, h) \in \Gamma$ διοτι Z γραμμ. υποχωρος με
$Z \supset W \supset Y$ και η h επεκτείνει την ψ, η
ψ επεκτείνει την φ άρα η h επεκτείνει την φ.

με $(W,\psi) < (Z,h)$ (↯) διότι το (W,ψ) μεγιστικό. Άρα, $W = X$

Πόρισμα (sos)

Έστω X χώρος με νόρμα και $Y \subset X$ υπόχωρος και $f \in Y^*$. Τότε, $\exists g \in X^*$ που επεκτείνει την f και μάλιστα $\|g\| = \|f\|$.

Απόδ

Ορίζουμε $p : X \to \mathbb{R}$: $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$

Το p είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές και $\forall y \in Y$ το $f(y) \leq \|f\| \cdot \|y\| = p(y)$

Άρα, από το Θεώρημα Hahn-Banach $\exists g : X \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της f ώστε $g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$

Δηλαδή, $g(x) \leq \|f\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$

λόγω της γραμμικότητας

$-g(x) = g(-x) \leq \|f\| \cdot \|-x\| = \|f\| \cdot \|x\|$

Άρα, $|g(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$

Άρα $g \in X^*$ με $\|g\| \leq \|f\|$

Αντίστροφα,

$$\|f\| = \sup\{f(x) : x \in X, \|x\| \leq 1\} \underset{\text{g επεκτείνει την f}}{\leq} \sup\{g(x) : x \in X, \|x\| \leq 1\} = \|g\|$$

Άρα, $\|f\| = \|g\|$

Πρόταση

Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ γραμμ. ανεξ. διανύσματα του X και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Τότε $\exists g \in X^*$ με $g(x_i) = \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Ειδικά αν $X \neq \{0\} \Rightarrow X^* \neq \{0\}$

Απόδειξη

Έστω $Y = Span\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι βάση του Y.

Ορίζουμε $f: Y \to \mathbb{R}$ με $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i$

Αφού το Π.Ο είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης και f προφανώς γραμμική τότε f συνεχής

$f(x_i) = \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Άρα, η $f \in Y^*$

Συνεπώς, από το πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach θα $\exists g \in X^*$ που επεκτείνει την f και $\|g\| = \|f\|$

Άρα, $g(x_i) = f(x_i) = \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Πρόταση

Έστω X χώρος με νόρμα

i) Αν Y κλειστός $\leq X$ και $x_0 \in X \setminus Y$ τότε $\exists g \in X^*$ με $\|g\| = 1$ ε/ω $g(y) = 0$ $\forall y \in Y$ και στο x_0:
$g(x_0) = d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\} \overset{>0}{}$

ii) Αν $x_0 \in X$ με $x_0 \neq 0$ τότε $\exists g \in X^*$ με $\|g\| = 1$ ε/ω $g(x_0) = \|x_0\|$

iii) Αν $Y \leq X$ τότε Y πυκνός στον X αν.ν $\forall g \in X^*$ με $g(y) = 0$, $\forall y \in Y$ ισχύει $g = 0$

Απόδειξη

i) Θέτουμε $Z = Span(Y \cup \{x_0\}) = Y \oplus Span\{x_0\} =$
$= \{y + \lambda x_0 : y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Θέτουμε $d := d(x_0, Y)$ και ορίζουμε $f: Z \to \mathbb{R}$ με $f(y + \lambda x_0) := \lambda d$ γραμμική (άμεσο), και $f(x_0) = d$, $f(y) = 0$, $\forall y \in Y$ (προφανές)

Θδο f συνεχής $\Leftrightarrow$ f φραγμ. γραμ. συναρτησοειδές

$\sup\left\{\frac{|f(z)|}{\|z\|}, z \in Z \text{ και } z \neq 0\right\} =$

$= \sup\left\{\frac{|f(y + \lambda x_0)|}{\|y + \lambda x_0\|}, y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}, y + \lambda x_0 \neq 0\right\} =$

μπορώ να το υποθέσω

$$= \sup\left\{ \frac{d|\lambda|}{\|y+\lambda x_0\|} : y \in Y, \lambda \neq 0 \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \frac{d}{\|\frac{y}{\lambda}+x_0\|} : y \in Y, \lambda \neq 0 \right\} =$$

$$= d \sup\left\{ \frac{1}{\|x_0-y\|} : y \in Y \right\} =$$

$$= d \cdot \frac{1}{\inf\{\|x_0-y\| : y \in Y\}} = \frac{d}{d} = 1$$

Άρα, $f \in Z^*$ με $\|f\|=1$

Άρα, από το πόρισμα του Θ. Hahn-Banach $\exists g \in X^*$ που επεκτείνει την f και $\|g\|=\|f\|=1$

$g(x_0) = f(x_0) = d = d(x_0, Y)$

ii) Άμεσου απαντιου δίου για $Y=\{0\}$ απο το (i) προκύπτει το ζητούμενο

iii) ($\Rightarrow$): Ισχύει άμεσα αφού $\overline{Y}=X$ και g συνεχής εφόσον μηδενίζεται σε ένα σημείο του Y τότε αφού $\overline{Y}=X$ (δηλ. πυκνος) και g συνεχής τότε θα μηδενίζεται και σε ολόκληρο το χώρο

($\Leftarrow$): Αν Y μη πυκνος στον $X \Rightarrow \overline{Y} \neq X$
$\overline{Y}$ κλειστος $\subsetneq X$, εφαρμόζοντας λοιπόν το (i)
Θα υπάρχει $g \in X^*$ με $\|g\|=1$: $g|_{\overline{Y}}=0$
Άρα, $g|_Y=0$ άτοπο γιατί βρήκαμε ένα μη μηδενικό που μηδενίζεται στον Y

Πρόταση

Έστω X νορμικός χώρος και X^* διαχωρίσιμος τότε και ο X διαχωρίσιμος. ($\ell_1^*(\mathbb{N})$ ως αντιπαράδειγμα για το αντίστροφο)

Απόδειξη

Αν $X^* = \{0\}$ τότε $X = \{0\}$

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα

$S_{X^*} = \{ f \in X^* : \|f\| = 1 \}$

Τότε S_{X^*} είναι διαχωρίσιμος $\Rightarrow \exists \{f_1, f_2, \dots\}$ αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του S_{X^*} $\|f_n\| = \sup\{f_n(x) : x \in X, \|x\| \leq 1\} = 1$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in X$ με $\|x_n\| \leq 1$ και $f_n(x_n) > \frac{1}{2}$. Θεωρούμε επίσης την γραμ. θήκη $Y = \operatorname{Span}\{x_1, x_2, \dots\}$.

Αρκεί νδο το $\overline{Y}$ πυκνό στο X

Διότι τότε $\{x_1, x_2, \dots\}$ θα είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του X.

Έστω $\overline{Y} \neq X \overset{\text{Πόρισμα}}{\Longrightarrow} \exists f \in X^*$ με $f \neq 0$ και $f|_Y = 0$

Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\| = 1$

Συνεπώς $f \in S_{X^*}$

Συνεπώς, $\forall n = 1, 2, \dots$

$\|f - f_n\| \geq |(f - f_n)(x_n)| = |\cancel{f(x_n)}^{\,0} - f_n(x_n)| =$

$= |f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$. άτοπο $\forall n \in \mathbb{N}$

διότι $\{f_1, f_2, \dots\}$ πυκνό στην S_{X^*}

ωσ έδει Π.